

MAGYAR ÁLLAMI EÖTVÖS ÖSZTÖNDÍJ 2022

FÉKETE IMRE - BESZÁMOLÓ

1. MOBILITÁS EREDETI CÉLJA

A mobilitás fő célja az volt, hogy az Ösztöndíjas a magyarországi felsőoktatás és az itthoni numerikus analízis társadalom számára kevéssé oktatott/kutatott számítógépes folyadékdinamika (Computational Fluid Dynamics - CFD) időspecifikus integrátorokkal ismerkedjen meg, illetve egy ehhez kapcsolódó konkrét kutatási projekt alapjait együttműködésben lefektesse. A svédországi 1 hónapos kollaboráció másik célja volt továbbá az is, hogy a fogadóintézményben induló Computational Science, valamint Applied Computational Science mesterképzések gondolati háttérét és szerkezetét az Ösztöndíjas és a fogadóintézmény képviselője megvitassák. Ennek indítéka az volt, hogy a Magyar Rektori Konferencia Természettudományi Bizottsága kilátásba helyezte a „Számítógépes modellezés és szimuláció MSc” mesterszak elindítását.

A mobilitás céljai teljes mértékben megvalósultak.

2. MEGVALÓSULT KUTATÁS TÖMÖR TARTALMA

Az Ösztöndíjas a Magyar Állami Eötvös Ösztöndíjas kutatását a svéd Lundi Egyetem Matematikai Központjához tartozó Numerikus Analízis Csoportjában Prof. Philipp Birken vezetésével végezte 2022. augusztus 1 – 31. között.

Az 1 hónapos időtartam alatt az Ösztöndíjas a CFD feladatokhoz tartozó specifikus időintegráláshoz kapcsolódó kérdésének alapjait és lehetőségeit kutatta. A közel másfél tucat szakcikk feldolgozásából származó kollaboráció alapvető eredményei tömören lentebb olvashatóak a legfontosabb hivatkozásokkal.

◇ Motiváció, irodalmi feldolgozás és kutatási projekt ötlet

A tágabb értelemben vett motivációt robusztus és hatékony numerikus módszerek kidolgozása adja az ún. nagy örvény szimulációk (Large Eddy Simulations - LES) esetén, mely a CFD témakör egy kiemelt kérdése. Gyakori alkalmazási példa gyanánt gondolhatunk itt következő generációs repülőgépek hajtóműveire, vagy akár szélturbinákra is.

A modellezésben jellemzően megjelenő nemlineáris megmaradási törvényeknek általában nem létezik gyenge megoldása. A szakirodalomban ezt gyakran azzal próbálják orvosolni, hogy a termodinamika második törvényét egyfajta feltételként adják hozzá. Matematikai értelemben ilyenkor az entrópia nem növekszik. Fontos elméleti és gyakorlati példa erre az ötletre a Navier-Stokes-egyenletek. Az ötlet ereje abban áll, hogy számos nemlineáris megmaradási törvény esetén igazolhatóan egyértelmű gyenge entrópia megoldáshoz vezet.

Ekkor megköveteljük a – már szemidiszkrét – numerikus módszertől, hogy a diszkrét folyam entrópia disszipatív legyen. Azaz azt, hogy létezzen olyan konvex funkcionál, hogy a megoldás entrópiája időben ne nőjön. Ez az ún. entrópia stabilitás.

Az elmúlt években jelentős előrelépések történtek. Nevezetesen 2013-ban olyan robusztus térbeli diszkretizációkat alkottak, melyek lineárisan L_2 és entrópia stabilak időben [1]. Ezek után sikerült 2019-ben az első teljesen diszkrét sémát megadni, mely a kívánatos tulajdonsággal bír. Konkrétan ún. DG-SEM (Discontinuous Galerkin Spectral Element Method – Nemfolytonos Galjorkin Spektrál Módszer) tér-idő változata, ahol a fluxus speciális

megválasztásával lehetett elérni az entrópia stabilitást [2]. Egy évre rá, azaz 2020-ban relaxációs technikán alapuló entrópia stabil módszereket vezettek be Euler- és Navier-Stokes-egyenletekre [3].

Navier-Stokes-egyenletek esetén térben érdemes olyan tartomány felosztás (domain decomposition) alapú térbeli diszkretizációkat használni, mely a határrég méretben különböző celláit külön kezeli. Általános megközelítésként érdemes a kicsi és finom felosztást igénylő cellákat időben implicit, míg a nagyobb cellákat időben explicit módon kezelni. Tipikus választás az ilyen ún. Implicit-Explicit (IMEX) időintegrátor családra a Runge–Kutta típusú módszerek.

Ehhez kapcsolódóan természetes kutatási kérdésként adódik az entrópia stabilitás kérdése is. Alapvetően két kutatási irány adódott. Az elsőnek az alap gondolata az, hogy az IMEX módszer implicit Runge–Kutta módszerét cseréljük le a lineáris részt jól megoldó A-stabil tulajdonsággal is rendelkező ún. exponenciális integrátor családra. A második és egyszerűbben kezelhető kutatási irány a korábban említett relaxációs módszerhez tartozó eredmények IMEX családra történő természetes kiterjesztése volt. Az ösztöndíjas időszak vége felé realizálódott bennünk, hogy – sajnálatos módon – a nagyon friss, július 20-ai arxiv cikk [4] kezelte már a kérdéses kutatási irányt. Ezek fényében a megkezdett közös kutatás az első irány vonatkozásában folytatódik.

Hivatkozások

- [1] T. C. Fischer, M. H. Carpenter, *High-order entropy stable finite difference schemes for nonlinear conservation laws: Finite domains*, J. Comp. Phy., 252 (2013), pp. 518–557
- [2] L. Friedrich, G. Schnücker, A. R. Winters, D. C. Del Rey Fernández, G. J. Gassner, M. H. Carpenter, *Entropy Stable Space-Time Discontinuous Galerkin Schemes with Summation-by-Parts Property for Hyperbolic Conservation Laws*, J. Sci. Comput., 80 (2019), pp. 175–222
- [3] H. Ranocha, M. Sayyari, L. Dalcin, M. Parsani, D. I. Ketcheson, *Relaxation Runge–Kutta Methods: Fully-Discrete Explicit Entropy-Stable Schemes for the Euler and Navier-Stokes Equations*, SIAM J. Sci. Comput., 42 (2020), pp. A612–A638
- [4] S. Kang, E. M. Constantinescu, *Entropy-Preserving and Entropy-Stable Relaxation IMEX and Multirate Time-Stepping Methods*, arXiv:2108.08908v4, (2022), pp. 1–37

4. EREDMÉNYEK, TUDOMÁNYOS KONFERENCIÁK ÉS WORKSHOPOK TÉTELES FELSOROLÁSA

Az Ösztöndíjas az 1 hónapos ösztöndíjas periódusa során nemcsak a fentebb részletezett kutatási tevékenységet folytatta, hanem a mobilitás másik céljával szolgáló bevezetőben említett specifikus mesterszakos képzési tervekkel is megismerkedett. Ezeket az ismereteket az Ösztöndíjas az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar stratégiai és innovációs dékánhelyettese és egyben Matematikai Intézetének vezetője, Dr. Simon Péter irányába is tolmácsolja. Az Ösztöndíjas továbbá egy 45 perces tudományos előadást is tartott.

◇ Cím: *Linear Multistep Methods: Error estimation and step-size control*

- NA Seminar (Numerikus Analízis Szeminárium), 2022. augusztus 11.
- Felhívás honlapja: [link](#)

5. IGAZOLÁS

Az Ösztöndíjas csatolta az eltöltött időszakról szóló Lundi Egyetem által pecsételt és Prof. Philipp Birken által aláírt igazolást.